

Recasages possibles : 151, 156, 159.

Référence : Algèbre et géométrie, ROMBALDI (p. 672-675)

Développement (Réduction de Jordan d'un nilpotent par la dualité)

Soit $u \in \mathcal{N}(E)$ d'indice q .

Lemme 1 Pour tout vecteur $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$, la famille

$$\mathcal{B}_{u,x} = (x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$$

est libre et $F = \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,x})$ est stable par u .

Lemme 2 L'endomorphisme u^\top de E^* est nilpotent d'indice q et il existe $\varphi \in E^*$, $x \in E$ tels que $F = \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,x})$ et $G = (\text{Vect}(\mathcal{B}_{u^\top, \varphi}))^\circ$ soient supplémentaires dans E et stables par u .

Théorème 3 Il existe une base \mathcal{B} de E et des entiers $d_1 = q \geq d_2 \geq \dots \geq d_r \geq 1$ tels que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Diag}(J_{d_1}, J_{d_2}, \dots, J_{d_r})$, où J_k est le bloc de Jordan de taille k .

Théorème 4 (Réduction de Jordan) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u . Alors, pour tout $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$, il existe des entiers $d_{j,1} \geq \dots \geq d_{j,r_j} \geq 1$ et il existe une base \mathcal{B} de E telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Diag}(\lambda_1 I_{d_{1,1}} + J_{d_{1,1}}, \dots, \lambda_1 I_{d_{1,r_1}} + J_{d_{1,r_1}}, \dots, \lambda_m I_{m, d_{m,r_m}} + J_{d_{m,r_m}}).$$

Cette matrice est appelée *réduite de Jordan* de u .

- *Preuve du Lemme 1* : Comme u est d'indice de nilpotence q , l'endomorphisme u^{q-1} de E est non nul, donc le lemme ne porte pas sur une propriété vérifiée par l'ensemble vide (ouf). Soit donc $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$ et soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{q-1} \in K$ tels que

$$\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \dots + \lambda_{q-1} u^{q-1}(x) = 0.$$

En appliquant u^{q-1} à cette égalité, on trouve

$$\lambda_0 u^{q-1}(x) + \lambda_1 u^q(x) + \dots + \lambda_{q-1} u^{2q-2}(x) = u^{q-1}(0) = 0.$$

Or, u étant nilpotent d'indice q , si $k \geq q$, on a $u^k(x) = 0$ donc finalement, on obtient $\lambda_0 u^{q-1}(x) \neq 0$. Comme on a pris soin de choisir x tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$, on obtient $\lambda_0 \neq 0$. Soit alors $p \in \llbracket 1, q-1 \rrbracket$ tel que pour tout $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $\lambda_i = 0$. On a

$$\lambda_p u^p(x) + \lambda_{p+1} u^{p+1}(x) + \dots + \lambda_{q-1} u^{q-1}(x) = 0.$$

En appliquant u^{q-p-1} à cette égalité, on obtient

$$\lambda_p u^{q-1}(x) + \lambda_{p+1} u^q(x) + \dots + \lambda_{q-1} u^{2q-p-2}(x) = u^{q-p-1}(0) = 0,$$

d'où d'après le même raisonnement qu'au-dessus, $\lambda_p = 0$. Par récurrence finie, on conclut que tous les λ_i sont nuls donc $\mathcal{B}_{u,x} = (x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est libre. En particulier, si $F = \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,x})$, alors $\dim(F) = \#\mathcal{B}_{u,x} = q$. L'espace vectoriel F est de plus stable par u car si $y = \lambda_0 x + \dots + \lambda_{q-1} u^{q-1}(x) \in F$, alors

$$u(y) = \lambda_0 u(x) + \dots + \lambda_{q-2} u^{q-1}(x) + \lambda_{q-1} u^q(x) = \lambda_0 u(x) + \dots + \lambda_{q-2} u^{q-1}(x) \in F.$$

Ceci conclut la preuve du **Lemme 1**.

- *Preuve du Lemme 2* : Rappelons que u^\top est l'endomorphisme de E^* défini par : $\forall \varphi \in E^*$, $u^\top(\varphi) = \varphi \circ u$. Alors, on voit directement par associativité de la composition $\forall k \in \mathbb{N}, \forall \varphi \in E^*$,

$$(u^\top)^k(\varphi) = \varphi \circ u \circ \dots \circ u = \varphi \circ u^k = (u^k)^\top(\varphi),$$

d'où $(u^\top)^k = (u^k)^\top$. Ainsi, on a $(u^\top)^q = (u^q)^\top = (0_{\mathcal{L}(E)})^\top = 0_{\mathcal{L}(E^*)}$, donc u^\top est nilpotent. Son indice de nilpotence est encore q car $(u^\top)^{q-1} = (u^{q-1})^\top \neq 0$. Par conséquent, il existe $\varphi \in E^*$ telle que $(u^\top)^{q-1}(\varphi) \neq 0$. Soit alors $x \in E$ tel que $(u^\top)^{q-1}(\varphi)(x) = (\varphi \circ u^{q-1})(x) \neq 0$. En particulier, on a $u^{q-1}(x) \neq 0$. En gardant les mêmes notations que dans le **Lemme 1**, on pose

$$H = \text{Vect}(\mathcal{B}_{u^\top, \varphi}) \leq E^* \quad \text{et} \quad F = \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,x}) \leq E.$$

D'après le **Lemme 1**, H est stable par u^\top , F est stable par u et ces espaces sont de dimension $\dim(H) = \dim(F) = q$. Posons

$$G = H^\circ = \{x \in E \mid \forall \psi \in H, \psi(x) = 0\} \leq E,$$

et montrons alors que G est stable par u . Soit $x \in G$, il s'agit de montrer que $u(x) \in G$, c'est-à-dire que

$$\forall \psi \in H, \psi(u(x)) = 0.$$

Soit $\psi \in H$. On a $\psi(u(x)) = (\psi \circ u)(x) = u^\top(\psi)(x)$. Or, H est stable par u^\top donc $u^\top(\psi) \in H$ et comme $x \in G = H^\circ$, on a $u^\top(\psi)(x) = 0$. Finalement, on a bien $u(x) \in G$ ce qui prouve que G est stable par u . Comme

$$\dim(G) = \dim(E) - \dim(H) = \dim(E^*) - \dim(F),$$

on a $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$. Alors, pour montrer que $F \oplus G = E$, il suffit de montrer que $F \cap G = \{0\}$. Soit donc $y \in F \cap G$. Comme $y \in F$, il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_{q-1} \in K$ tels que $y = \lambda_0 x + \dots + \lambda_{q-1} u^{q-1}(x)$. Alors, en appliquant u^{q-1} puis φ , on obtient

$$\varphi(u^{q-1}(y)) = \lambda_0 \varphi(u^{q-1}(x)) + \dots + \lambda_{q-1} \varphi(u^{2q-2}(x)).$$

Or comme dans la preuve du **Lemme 1**, si $k \geq q$, $u^k(x) = 0$, et de plus $y \in G$ qui est stable par u donc $u^{q-1}(y) \in G$ et ainsi

$$0 = \varphi(u^{q-1}(y)) = \lambda_0 \varphi(u^{q-1}(x)).$$

Comme x a été choisi tel que $\varphi(u^{q-1}(x)) \neq 0$, on obtient $\lambda_0 = 0$. Le même raisonnement par récurrence que dans le **Lemme 1** montre alors qu'en fait tous les λ_i sont nuls, donc $y = 0$. Finalement, $F \cap G = \{0\}$ donc $F \oplus G = E$. Ceci conclut la preuve du **Lemme 2**.

- *Preuve du Théorème 3* : Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ que pour tout K -espace vectoriel E de dimension n , pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice q , il existe une base \mathcal{B} de E et des entiers $d_1 = q \geq d_2 \geq \dots \geq d_r \geq 1$ tels que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Diag}(J_{d_1}, J_{d_2}, \dots, J_{d_r})$.

• Si $\dim(E) = 1$, le seul endomorphisme nilpotent de E est l'endomorphisme nul, donc toute base convient, et $r = 1, d_1 = 1$.

• Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Supposons la propriété vraie pour tout espace vectoriel de dimension $\leq n-1$. Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice q . D'après le **Lemme 2**, il existe $\varphi \in E^*$ et $x \in E$ tels que $F = \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,x})$ et $G = (\text{Vect}(\mathcal{B}_{u^\top, \varphi}))^\circ$ sont stables par u et supplémentaires dans E . Alors, on voit que la matrice de $u|_F$ dans la base $\mathcal{B}_{u,x}$ est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{u,x}}(u|_F) = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en renversant l'ordre dans la base $\mathcal{B}_{u,x}$, i.e en considérant la base $\mathcal{B}_{u,x}^{\text{op}} = (u^{q-1}(x), u^{q-2}(x), \dots, u(x), x)$, on voit que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_{u,x}^{\text{op}}}(u|_F) = J_q$. Si

$q = n$, on a terminé, et sinon $\dim(G) \geq 1$ et en complétant $\mathcal{B}_{u,x}^{\text{op}}$ en une base $\tilde{\mathcal{B}}$ de E à l'aide d'une base $\tilde{\mathcal{B}}_G$ de G , comme G est stable par u , on obtient

$$\text{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}}(u) = \begin{pmatrix} J_q & 0 \\ 0 & \text{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}_G}(u|_G) \end{pmatrix}.$$

Or, $u|_G$ est un endomorphisme de G nilpotent d'indice $q_G \leq q$ (car $u^q = 0 \Rightarrow (u|_G)^q = 0$) et $\dim(G) \leq n-1$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, il existe une base \mathcal{B}_G de G et des entiers $d_2 = q_G \geq \dots \geq d_r \geq 1$ tels que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_G}(u|_G) = \text{Diag}(J_{d_2}, \dots, J_{d_r})$. Alors, dans la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{u,x}^{\text{op}} \cup \mathcal{B}_G$ de E , on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Diag}(J_{d_1}, J_{d_2}, \dots, J_{d_r}) \quad \text{avec } d_1 = q \geq d_2 = q_G \geq \dots \geq d_r \geq 1,$$

qui est exactement la forme annoncée, ce qui conclut la récurrence et achève la preuve du **Théorème 3**.

- *Preuve du Corollaire 4* : On conserve les notations de l'énoncé. Pour $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on note $N_k = \text{Ker}((u - \lambda_k \text{id})^{\alpha_k})$ les sous-espaces caractéristiques de u . D'après le lemme des noyaux, on a $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_m$. Fixons $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Le sous-espace caractéristique N_k est de dimension α_k , stable par u et la restriction de $u - \lambda_k \text{id}$ à N_k est nilpotente. Ainsi, d'après le **Théorème 3**, il existe \mathcal{B}_k une base de N_k et des entiers $d_{k,1} \geq \dots \geq d_{k,r_k} \geq 1$ tels que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_k}((u - \lambda_k \text{id}_E)|_{N_k}) = \text{Diag}(J_{d_{k,1}}, \dots, J_{d_{k,r_k}}).$$

Or, $u|_{N_k} = \lambda_k \text{id}_{N_k} + (u - \lambda_k \text{id}_E)|_{N_k}$ donc

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}_k}(u|_{N_k}) &= \lambda_k I_{\alpha_k} + \text{Diag}(J_{d_{k,1}}, \dots, J_{d_{k,r_k}}) \\ &= \text{Diag}(\lambda_k I_{d_{k,1}} + J_{d_{k,1}}, \dots, \lambda_k I_{d_{k,r_k}} + J_{d_{k,r_k}}). \end{aligned}$$

Si $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_m$, alors \mathcal{B} est une base de E dans laquelle la matrice de u est exactement de la forme

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Diag}(\lambda_1 I_{d_{1,1}} + J_{d_{1,1}}, \dots, \lambda_1 I_{d_{1,r_1}} + J_{d_{1,r_1}}, \dots, \lambda_m I_{d_{m,d_{m,r_m}}} + J_{d_{m,r_m}}).$$

Ceci prouve le **Théorème 4** de réduction de Jordan.